

φύλλαδο 2:

① Τι παρουσιάζει στο επίπεδο Οxy οι παρακάτω Εξισώσεις?

α) $x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0$

β) $x^2 + xy - y^2 - 2x - y + 1 = 0$ ①

γ) $2y^2 - 8x + 4y + 1 = 0$

Λύση:

α) $x^2 + 6x - 4y^2 + 16y - 11 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 - 9 - 4(y^2 - 4y + 4 - 4) - 11 = 0$

$\Rightarrow (x+3)^2 - 9 - 4(y-2)^2 + 16 - 11 = 0$

$\Rightarrow (x+3)^2 - 4(y-2)^2 = 4$

$\Rightarrow \frac{(x+3)^2}{4} - (y-2)^2 = 1 \rightarrow \text{"Υπερβολή"}$

β) Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή: $Q(x,y) = x^2 + xy - y^2$

Ο πίνακας της Q είναι: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$

• Εύρεση ιδιοτιμών:

$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda) - \frac{1}{4} = 0$

$-1 - \cancel{\lambda} + \lambda + \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Στο β) υπάρχει ο όρος xy, άρα δεν είναι σε κανονική τετραγωνική.

23/05/2019.

②

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow \left(x' - \frac{2}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} \right)^2 - \left(y' + 2 \sqrt{10-4\sqrt{5}} \right)^2 =$$

$$= 4(10-4\sqrt{5}) + \frac{4}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} - 1.$$

$$\delta) 2y^2 + 4y - 8x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(y^2 + 2y) - 8x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2(y^2 + 2y + 1 - 1) - 8\left(x - \frac{1}{8}\right) + 1 = 0$$

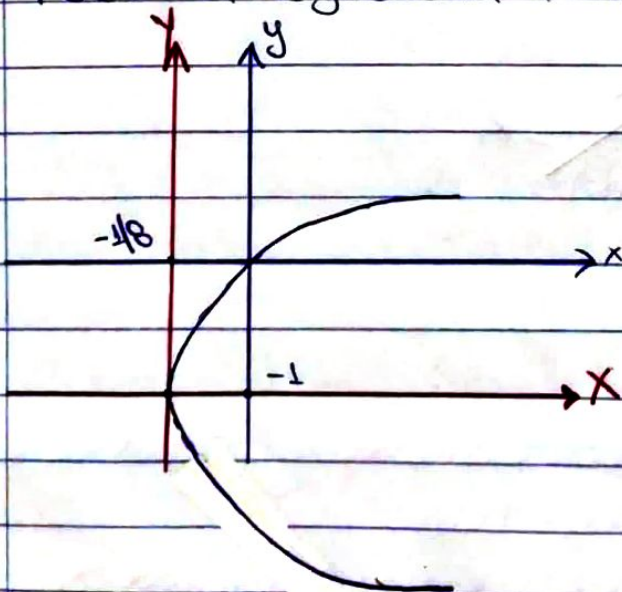
$$\Rightarrow 2(y+1)^2 - 8x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2(y+1)^2 - 8\left(x - \frac{1}{8}\right) = 0$$

Definieren $X = x - \frac{1}{8}$ und $Y = y + 1$.

Die n. e. f. g. w. n. z. u. l. b. i. n. e. r. n. l. o. e. b. i. n. : $Y^2 = 4X$

"Parabeln".



$$\textcircled{*} \sqrt{1^2 + (\sqrt{5}-2)^2} = \sqrt{1 + (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} \cdot 2 + 2^2} \\ = \sqrt{1+5-4\sqrt{5}+4} = \sqrt{10-4\sqrt{5}}$$

• Εύρεση ιδιοτιμών:

$$\triangleright V(\lambda_1): \begin{cases} (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}x - (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = (\sqrt{5}-2)t. \end{cases}$$

Επομένως, $\vec{v}_1 = (1, \sqrt{5}-2)$ είναι βάση του $V(\lambda_1)$.

Αλλά, για ΟΚΒ είναι το:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} \cdot (1, \sqrt{5}-2) \quad \textcircled{*}$$

$\triangleright V(\lambda_2)$: Επειδή ο A είναι 2×2 πίνακας και $V(\lambda_1) \perp V(\lambda_2)$, έπεται ότι μια ΟΚΒ του $V(\lambda_2)$ είναι το:

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} (2-\sqrt{5}, 1)$$

• Εύρεση πίνακα P :

$$\text{Έχουμε: } P = \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1 & 2-\sqrt{5} \\ \sqrt{5}-2 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως, για νέα βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, η μορφή Q γράφεται: $Q(x', y') = \frac{\sqrt{5}}{2} (x')^2 - \frac{\sqrt{5}}{2} (y')^2$,

$$\text{όπου } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1 & 2-\sqrt{5} \\ \sqrt{5}-2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} x' + (2-\sqrt{5})y' \\ (\sqrt{5}-2)x' + y' \end{pmatrix} \quad \textcircled{2}$$

④ Νόρμα η εξίσωση της υπερβολής που διέρχεται από το σημείο $A(3,4)$ και έχει ασυμπτωτές ως:

$(E_1): 3x - 2y + 1 = 0$ και $(E_2): 2x + 3y - 7 = 0.$

Οι ασυμπτωτές της υπερβολής είναι ΤΑΥΤΑ
 κείμενο μεταξύ τους.

Λύση:

• Βρίσκω το σημείο τομής των (E_1) και (E_2) :

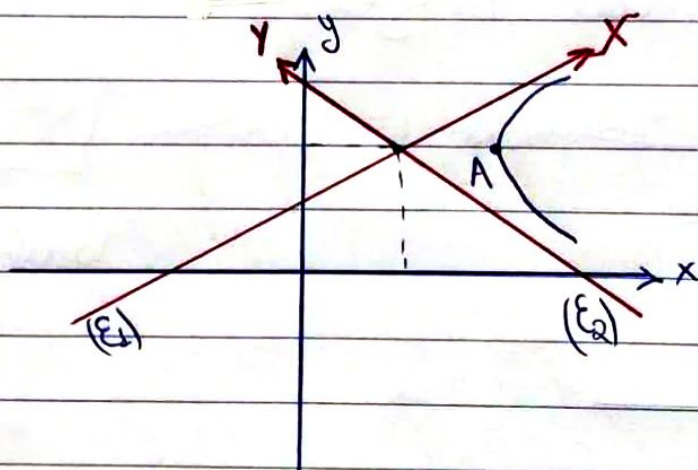
$$\begin{array}{r|l} 3x - 2y = -1 & -3 \\ 2x + 3y = 7 & -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} -9x + 6y = 3 \\ -4x - 6y = -14 \end{array}$$

$$\textcircled{+} \quad -13x = -11$$

$$\boxed{x = \frac{11}{13}}$$

Άρα: $3 \cdot \frac{11}{13} - 2y = -1 \Rightarrow 3 \cdot \frac{11}{13} - 26y = -13 \Rightarrow -26y = -46$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{46}{26}}$$



Θα θεωρήσουμε νέο βασικό σύστημα συν/κων, με άξονες ως (E_1) και (E_2) .

Το διάνυσμα $\vec{v} = (2,3)$ είναι παράλληλο στον (E_1) . Άρα η γωνία θ που σχηματίζει η (E_1) με τον άξονα x είναι:

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{v}, \vec{e}_1 \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{e}_1\|} = \frac{2}{\sqrt{4+9}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Άρα: $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$ και $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

Το νέο σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$X = \left(x - \frac{11}{13}\right) \cos \theta + \left(y - \frac{23}{13}\right) \sin \theta$$

$$Y = -\left(x - \frac{11}{13}\right) \sin \theta + \left(y - \frac{23}{13}\right) \cos \theta.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \left(x - \frac{11}{13}\right) + \frac{3}{\sqrt{13}} \left(y - \frac{23}{13}\right) \\ Y = \frac{-3}{\sqrt{13}} \left(x - \frac{11}{13}\right) + \frac{2}{\sqrt{13}} \left(y - \frac{23}{13}\right) \end{cases}$$

Οι συντεταγμένες του Α στο νέο σύστημα, είναι: $A = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 143 \\ 13 \end{pmatrix}, -2$

Η υπερβολή με εστίες τους άξονες X, Y είναι: $\boxed{X \cdot Y = a}$

Επειδή, η υπερβολή διέρχεται από το Α', έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \frac{143}{13} \left(\frac{-2}{\sqrt{13}} \right) = a \Rightarrow \boxed{a = -\frac{22}{13}}$$

Η υπερβολή είναι: $XY = -\frac{22}{13}$

Αρα στο απάνω μας έχουμε έχουμε:

$$\frac{1}{13} \left\{ 2 \cdot \left(x - \frac{1}{13} \right) + 3 \left(y - \frac{23}{13} \right) \right\} \cdot \left\{ -3 \left(x - \frac{11}{13} \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(y - \frac{23}{13} \right) \right\} = -\frac{23}{13}.$$

⊕ Στο επίπεδο Oxy, δίνεται η Εξίσωση:

$$3x^2 + 3y^2 - 10xy + 4x + 4y - 4 + 8\lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Για ποιές τιμές του λ , η Εξίσωση
παριστάνει κύκλο ευθεία.

Λύση:

► **Βήμα 1:** Θα διαγωνοποιήσουμε την
τετραγωνική μορφή:

$$Q(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 10xy$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Ιδιότητες:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)^2 - 25 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -2} \text{ και } \boxed{\lambda_2 = 8}$$

Ιδιότητες:

$$\bullet V(\lambda_1): \begin{cases} 5x - 5y = 0 \\ -6x + 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1)}$$

• $V(\lambda_2)$: Έπειδή ο A είναι 2×2 και $V(\lambda_1) \perp V(\lambda_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1, 1)}$$

Ο πίνακας $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\text{και } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x' & -y' \\ x' & y' \end{pmatrix}$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση έχουμε:

$$-2(x')^2 + 8(y')^2 + 4(\sqrt{2} \cdot x') - 4 + 8\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$-2(x')^2 + 8(y')^2 + 4\sqrt{2} \cdot x' - 4 + 8\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$-(x')^2 + 4(y')^2 + 2\sqrt{2} x' - 2 + 4\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$(x' + \sqrt{2})^2 - 4(y')^2 - 4\lambda = 0. \text{ Για να είναι}$$

ζεύγος ευθείων,

$$\text{πρέπει: } \lambda = 0.$$

Θέματα Ιανουαρίου 2018.

Θέμα 19:

Με χρήση ανισότητας Cauchy-Schwarz, να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη της παράστασης: $g(x, y, z) = x - y + 3z$, όταν: $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$.

Λύση:

$$\text{Έχουμε } g(x, y, z) = x - y + 3z = \underline{1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} y + \frac{3}{2} \cdot 2z$$

$$= \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2} \right), (\sqrt{2}x, \sqrt{3}y, 2z) \right\rangle$$

Από από ανώδεκα C-s έχουμε: 1 (υπόθεση)
 $\Rightarrow |g(x, y, z)| \leq \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{9}{4}} \cdot \sqrt{2x^2 + 3y^2 + 4z^2}$

$$\Rightarrow |g(x, y, z)| \leq \sqrt{\frac{37}{12}}$$

Άρα: $\boxed{\max g = \sqrt{\frac{37}{12}}}$, $\boxed{\min g = -\sqrt{\frac{37}{12}}}$,

Οι τιμές λαμβάνονται όταν:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2} \right) = \lambda (\sqrt{2}x, \sqrt{3}y, 2z).$$

Θέμα 2:

Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{a}_1 = (1, 1, 1)$ και $\vec{a}_2 = (1, -2, 1)$.

α) VB $\vec{a}_1$ και $\vec{a}_2$ είναι Γ.Α.

β) VB $\rightarrow$ μια βάση B του $\mathbb{R}^3$ που περιέχει τα $\vec{a}_1$ και $\vec{a}_2$.

γ) VB $\rightarrow$ οι συνιστώσες του $\vec{c} = (3, -1, 2)$ στη βάση B .

δ) VB $\rightarrow$ το εμβαδόν των $\phi(\pi)$, όπου ϕ : ισομετρία και π παρλλη με πλευρές τα $\vec{a}_1$ και $\vec{a}_2$.

Λύση:

α) Παρατηρούμε ότι: $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = \langle (1, 1, 1), (1, -2, 1) \rangle = 1 - 2 + 1 = 0$

Άρα $\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2 \Rightarrow \Gamma.Α.$

β) Θα διατεταχθεί ως :

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (3, 0, -1).$$

Άρα: $\vec{B} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$: βάση ορθογώνια.

γ) Πρέπει να βρούμε k, λ, μ τ.ω.

$$\vec{c} = k \cdot \vec{a}_1 + \lambda \cdot \vec{a}_2 + \mu \cdot \vec{a}_3$$

Επειδή $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ κάθετα ανά δύο έχουμε:

$$\langle \vec{c}, \vec{a}_1 \rangle = k \cdot \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle + \lambda \cdot \langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle + \mu \cdot \langle \vec{a}_3, \vec{a}_1 \rangle$$

$$\Rightarrow k = \frac{\langle \vec{c}, \vec{a}_1 \rangle}{\|\vec{a}_1\|^2} = \frac{\langle (3, -1, 2), (1, 1, 1) \rangle}{(\sqrt{3})^2} \Rightarrow \boxed{k = \frac{4}{3}}$$

$$\text{Ομοίως: } \lambda = \frac{\langle \vec{c}, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_2\|^2} = \dots \text{ και } \mu = \frac{\langle \vec{c}, \vec{a}_3 \rangle}{\|\vec{a}_3\|^2} = \dots$$

δ) Το εμβαδόν του παραλληλ. ^(m) είναι:

$$E(m) = \|\vec{a}_1\| \cdot \|\vec{a}_2\| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}, \text{ επειδή } \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2.$$

$$\text{Επίσης: } E(\phi(m)) = E(m).$$

Αν δεν ήταν κάθετα,
το εμβαδόν θα ήταν
το λήκος του εφωστεικού
γυαλιένου.

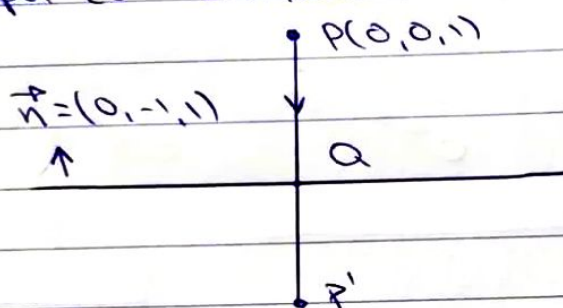
Θέμα 3:

Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $P(0,0,1)$ από το επίπεδο $(\pi): -y + z = 0$. Σε ποιο ημικύβιο του (π) βρίσκεται το σημείο P ? Να βρεθεί το ορθόγώνιο του P ως προς το (π) .

Λύση:

$$\text{Η απόσταση είναι: } d(P, \pi) = \frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0.$$

Άρα το P ανήκει στον θετικό ημικύβιο.



Η ευθεία (ϵ) που διέρχεται από το P είναι κάθετη στο (π) , και είναι η:

$$\epsilon(t) = \vec{OP} + \vec{n}t = (0,0,1) + (0,-1,1)t = (0, -t, 1+t)$$

Η ευθεία αυτή τέμνει το επίπεδο για:

$$-t + 1 + t = 0 \Rightarrow \boxed{t = -\frac{1}{2}}$$

Άρα το σημείο τέμνισης: $Q = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Από την εfigωση:

$$\begin{aligned} \vec{OP} + \vec{OP'} &= 2\vec{OQ} \Rightarrow \vec{OP'} = 2\vec{OQ} - \vec{OP} = \\ &= (0, 1, 1) - (0, 0, 1) \\ &= (0, 1, 0). \end{aligned}$$